ELETTRODINAMICA

Questa seconda parte inizia con la trascrizione delle equazioni di Maxwell nella forma di Hertz per lo spazio vuoto. (872) Einstein quindi suppone che queste equazioni così scritte siano valide per il sistema di riferimento S (supposto in quiete). Osservando ora da S un fenomeno elettromagnetico che si svolge su S' (supposto in moto uniforme con velocità v rispetto ad S), le equazioni che lo descrivono si dovranno ottenere applicando a quelle date su S le equazioni di trasformazione (8) da lui precedentemente trovate. La forma che egli trova per le equazioni di Maxwell-Hertz, scritte per il sistema S' osservato da S, è differente dalla forma che esse avevano nel sistema S.
A questo punto interviene però il principio di relatività: le equazioni di Maxwell-Hertz per lo spazio vuoto debbono valere anche in S', se valgono in S; e ciò vuol dire che queste equazioni debbono avere la stessa forma di quelle originariamente scritte per S, quando le scriviamo per il sistema S' osservato dallo stesso S'.

Scritte quindi le equazioni di Maxwell-Hertz per il sistema di riferimento S' (esse sono uguali a quelle scritte per S solo che ora le grandezze che vi compaiono sono grandezze di S' e quindi hanno l'apice), Einstein osserva, che i due sistemi di equazioni ottenuti per il riferimento S' (quello originato dalle equazioni di Maxwell-Hertz scritte per S e trasformate per S' e quello scritto direttamente per S') debbono esprimere la stessa cosa. (873) Affinché ciò accada , confrontando i due sistemi di equazioni con considerazioni di simmetria, si devono avere le seguenti equazioni di trasformazione per i campi elettrici E e magnetici H:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\[2ex] E'_y = \dfrac{E_y - \frac{v}{c} H_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\[2ex] E'_z = \dfrac{E_z + \frac{v}{c} H_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

(14)

$$\begin{cases} H'_x = H_x \\[2ex] H'_y = \dfrac{H_y + \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} E_z \\[2ex] H'_z = \dfrac{H_z - \frac{v}{c} E_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Con queste equazioni Einstein è in grado di dimostrare che tutte le asimmetrie alle quali aveva, accennato nell'introduzione del suo articolo, scompaiono e ciò senza alcun cambiamento di fondo nell'elettrodinamica, ma anzi fornendo una più profonda comprensione di essa.

Per interpretare le (14) egli inizia con il considerare una carica elettrica puntiforme la quale, nel sistema in quiete S, sia unitaria (e ciò vuol dire che quando questa, carica è in quiete nel sistema S, esercita su un'altra carica unitaria alla distanza di 1 cm la forza di 1 dine). Secondo il principio di relatività questa carica sarà unitaria anche se misurata nel sistema S' in moto relativo con velocità v. Ora, se questa carica è in quiete relativamente ad S allora il vettore campo elettrico E, di componenti E_x, E_y, E_z, è uguale per definizione alla forza che agisce su di essa (indicando con q la carica unitaria si ha E = F/q) ; se invece questa carica è in quiete relativamente ad S' (almeno nell'istante corrispondente) allora la forza che agisce su di essa, misurata in S', è uguale al vettore E', di componenti E'_x, E'_y., E'_z (anche qui, indicando con q' la carica unitaria, si ha E' = F'/q'). (874) Con quanto detto Einstein passa a confrontare la prima terna delle equazioni (14), quella relativa al campo E, con la vecchia formulazione e la nuova da lui proposta.

Secondo la vecchia formulazione le (14), relative al campo E, si possono esprimere a parole nel modo seguente:

> Se una carica elettrica puntiforme ed unitaria si muove in un campo elettromagnetico, su di essa agisce, oltre alla forza elettrica E, una forza elettromotrice che è data dal prodotto vettoriale della sua velocità per la forza elettromagnetica H, diviso per la velocità della luce. (875)

Secondo la nuova formulazione le (14), ancora relative al campo E, si possono esprimere a parole nel modo seguente:

> Se una carica elettrica puntiforme ed unitaria si muove in un campo elettromagnetico, la forza che agisce su di essa è uguale alla forza elettrica E esistente nel luogo dove si trova la carica; questa forza si ottiene per trasformazione del campo elettromagnetico in un sistema di coordinate che si trovi in quiete relativamente alla carica.

(Ed analoghe considerazioni possono essere sviluppate per le forze magnetomotrici).
Qual è allora la grande novità della nuova formulazione rispetto alla vecchia ? (876)

Nell'elaborazione della teoria di Lorentz, i moti relativi di una carica elettrica e di un campo magnetico erano sempre riferiti ad un etere immobile e quindi si poteva parlare di moto assoluto della carica elettrica o del campo magnetico rispetto all'etere. L'esistenza di questo moto assoluto, una volta del campo magnetico rispetto alla carica immobile relativamente all'etere ed una volta della carica rispetto al campo magnetico immobile relativamente all'etere (figura 41), fa nascere, rispettivamente, una volta una forza elettrica ed una volta una forza magnetica.

Nella teoria che ora propone Einstein non vi sono più moti assoluti rispetto all'etere. Anzi non vi è più nemmeno l'etere. Ora il crearsi di una forza elettrica o magnetica dipende solo dal moto relativo di carica elettrica e campo magnetico ed, in definitiva, dal solo moto dell'osservatore (a seconda che l'osservatore sia solidale con la carica elettrica o con il campo magnetico).

Ma è allora possibile che un dato campo sia una cosa o un'altra, a seconda del moto dell'osservatore ?

Il problema è risolto dalle equazioni di trasformazione (14): il campo elettrico ed il campo magnetico non hanno alcuna realtà indipendente, non esistono cioè fenomeni elettrici e magnetici gli uni distinti dagli altri; un campo che sia elettrico o magnetico in un dato riferimento ha sia componenti elettriche che magnetiche in un altro riferimento; il campo elettrico ed il campo magnetico non sono altro che casi particolari del più generale e dell'effettivo campo, quello elettromagnetico.
(877) E' il campo elettromagnetico che risulta indipendente dal moto dell'osservatore. Più in particolare, nell'esempio del moto relativo tra conduttore e magnete (si veda la figura 41), ma senza considerare l'etere): nel caso in cui l'osservatore e' solidale con il conduttore (figura 41a) si osserva il

sorgere di un campo elettrico e quindi di una forza elettromotrice nel caso in cui l'osservatore è solidale con il magnete (figura 41b) si osserva il sorgere di una stessa forza elettromotrice, originata dalla vecchia concezione della forza (magnetica) di Lorentz. Ora, con le equazioni (14) questa forza di Lorentz, nel passaggio da un sistema ad un altro (dal sistema in cui l'osservatore è solidale con il magnete a quello in cui è solidale con il conduttore), non rappresenta altro che un campo elettrico. (878)

Lo stessa Einstein così conclude questa parte del suo articolo:

"Si vede che nella teoria sviluppata la forza elettromotrice ha solo il ruolo di un concetto ausiliario, il quale deve la sua introduzione alla circostanza che le forze elettriche e magnetiche non hanno alcuna esistenza indipendente dallo stato di moto del sistema delle coordinate.

E' inoltre chiaro che le asimmetrie citate nell'introduzione riguardanti le correnti prodotte per mezzo di moti relativi di un magnete e di un conduttore spariscono. Anche le questioni relative alla 'sede' delle forze elettromotrici elettrodinamiche (macchine unipolari) divengono prive di significato." (879)

Con la revisione del concetto di tempo, a partire da una ridefinizione di simultaneità, Einstein è riuscito a mettere a posto le asimmetrie nei fenomeni elettromagnetici delle quali ha parlato nell'introduzione. Nel far questo si è sbarazzato del concetto di etere ed ha costruito le basi per una ridefinizione unitaria dei concetti meccanici ed elettrodinamici.

Le prime applicazioni di quanto fin qui trovato vengono subito dopo, nel seguito dell'articolo.

Il paragrafo 7 si occupa della **Teoria del principio di Doppler e della aberrazione**, mentre il paragrafo 8, **Trasformazione dell'energia dei raggi luminosi**, tratta del problema della pressione di radiazione. Non tratterò qui di queste applicazioni della relatività ma mi riservo di farlo per alcuni di questi fenomeni e per altri nel prossimo paragrafo, dove tratterò in modo più semplificato ed intuitivo quanto fino ad ora visto a proposito di relatività. Per ora basti osservare che i paragrafi 7 ed 8 sono un ulteriore esempio del metodo einsteniano: prima sono stati formulati i due principi alla base della relatività, sui quali è stata appunto costruita una teoria fisica basata su poche, semplici ed essenziali, ipotesi quindi si va ad applicare questa fisica a fenomeni particolari.

Nell'economia del nostro lavoro solo due parole possiamo dedicare al paragrafo 9 dell'articolo. **Trasformazione delle equazioni di Maxwell-Hertz con considerazione delle correnti di convezione**, nel quale si affronta il problema della conservazione della carica nel passaggio da un riferimento ad un altro in moto traslatorio uniforme rispetto al primo.

Einstein si riscrive ora le equazioni di Maxwell-Hertz introducendo in esse le 'correnti di convezione' e cioè esprimendo le componenti (E_x, E_y, E_z) del vettore campo elettrico E in funzione della densità di corrente e della velocità con cui si sposta l'elettricità. Egli osserva quindi che

"*se si pensano le masse elettriche invariabilmente legate a piccoli corpi rigidi (ioni, elettroni) queste equazioni sono le basi elettromagnetiche dell'elettrodinamica ed ottica dei corpi in movimento di Lorentz.*"

Supposte allora valide queste equazioni per il riferimento S considerato in quiete, le possiamo trasformare mediante le (8) e le (14) in modo che esse ci descrivano gli stessi fenomeni per un riferimento S', considerato in moto con velocità v rispetto ad S. Da questa trasformazione Einstein ricava, con lo stesso metodo 'di confronto' utilizzato per ricavare le (14) e come conseguenza del teorema di composizione delle velocità, un vettore che rappresenta la velocità di quelle masse elettriche misurata nel sistema S'. Einstein può così affermare che

"*è dimostrato che la base elettrodinamica della teoria elettrodinamica dei corpi in movimento di Lorentz, secondo i nostri principi cinematici, corrisponde al principio della relatività.*"

Infine egli ricava

"*il seguente importante teorema: se un corpo elettricamente carico si muove ad arbitrio nello spazio e con ciò non cambia la sua carica, considerata da un sistema di coordinate che si muova col corpo, la sua carica rimane anche costante, considerata dal sistema in quiete S.*"

E quest'ultimo teorema non esprime altro che **l'invarianza della carica elettrica nel passaggio da un riferimento ad un altro** e cioè che la carica elettrica non dipende dal suo moto.

Il paragrafo 10, ultimo dell'articolo, merita invece una, certa attenzione. In esso Einstein, partito dalla cinematica, inizia, l'elaborazione di una dinamica. Il titolo del paragrafo è: **Dinamica dell'elettrone (lentamente accelerato)**; vediamone il contenuto. (880)

Supponiamo di avere un elettrone di carica **e** che si muova all'interno di un campo elettromagnetico sotto le seguenti ipotesi; esso è stato appena messo in moto, con piccola accelerazione; la forza elettrica **f = eE** che agisce su di esso produce l'accelerazione **a** della sua massa $\mathbf{m_o}$, di modo che risulta $\mathbf{f = m_o a}$ ed in definitiva si ha $\mathbf{m_o\, a = eE}$, oppure, esprimendo questo ultimo risultato secondo le componenti a_x, a_y , a_z del vettore accelerazione e le componenti E_x , E_y , E_z del vettore campo elettrico,

$$\begin{cases} \mathbf{m_o a_x = eE_x} \\ \mathbf{m_o a_y = eE_y} \\ \mathbf{m_o a_z = eE_z} \end{cases}$$

dove m_o e' la massa dell'elettrone fintantoché la sua velocità è molto piccola rispetto alla velocità della luce. (881)

Supponendo che, ad un dato istante, l'elettrone sia. dotato di una velocità v, vogliamo calcolarci la legge del moto per l'elettrone nell'istante successivo. Per semplicità, supponiamo ancora che all'istante t = 0, istante in cui cominciamo a considerare il fenomeno, l'elettrone si trovi nell'origine delle coordinate e inizi a muoversi con velocità v lungo l'asse delle x (nel verso delle x crescenti). Le cose vanno allora come se l'elettrone si trovasse in quiete in un sistema di riferimento S' in moto con velocità v, (882) lungo il verso delle x crescenti, rispetto ad un riferimento S considerato in quiete. Quali sono allora le leggi che regolano il moto dell'elettrone, osservato da S', nell'istante immediatamente successivo all'inizio del moto ? Il principio di relatività ci dice che i fenomeni si debbono svolgere allo stesso modo nei due riferimenti e che si deve perciò avere

$$\begin{cases} \mathbf{m_o a'_x = eE'_x} \\ \mathbf{m_o a'_y = eE'_y} \\ \mathbf{m_o a'_z = eE'_z} \end{cases}$$

dove i simboli a'_x, a'_y, a'_z, ed E'_x, E'_y, E'_z, sono riferiti al sistema S'. Imponiamo inoltre che per t = x = y = z = 0 debba risultare t' = x' = y' = z' = 0; valgono allora le equazioni di trasformazione (8), per il tempo e le coordinate, e (14), per il campo elettrico. "*Con l'aiuto di queste equazioni trasformiamo le equazioni del moto ottenute sopra, dal sistema S' al sistema S* ", ed avremo, avendo indicato con β la quantità $\beta = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$: (883)

$$\begin{cases} \mathbf{m_o a_x = e\beta^{-3} E_x} \\ \mathbf{m_o a_y = e\beta^{-1} E_y} \\ \mathbf{m_o a_z = e\beta^{-1} E_z} \end{cases} \qquad (15\ \text{bis})$$

le quali si possono anche scrivere:

$$\begin{cases} m_o\beta^3 a_x = eE_x \\ m_o\beta\, a_y = e\,[E_y - (v/c)\, H_z] \\ m_o\beta\, a_z = e\,[E_z + (v/c)\, H_y] \end{cases} \qquad (15)$$

E fin qui nulla da dire. A questo punto però Einstein "*commise la svista di applicare ancora la meccanica newtoniana al moto dell'elettrone.*" (884) Seguiamo i suoi successivi passaggi. Egli si rende conto di avere al primo membro delle (15) delle *forze*. Al secondo membro, invece, almeno così sembra, che pensasse Einstein nel 1905, non ha delle forze (a parte la prima delle 15). Basta però moltiplicare per β ambedue i membri delle ultime due relazioni (15) per ottenere :

$$\begin{cases} m_o\beta^3 a_x = eE_x \\ m_o\beta^2 a_y = e\beta\,[E_y - (v/c)\, H_z] \\ m_o\beta^2 a_z = e\beta\,[E_z + (v/c)\, H_y] \end{cases}$$

e, ricordando le (14), si ha subito:

$$\begin{cases} m_o\beta^3 a_x = eE'_x \\ m_o\beta^2 a_y = eE'_y \\ m_o\beta^2 a_z = eE'_z \end{cases} \qquad (16)$$

A questo punto, al secondo membro delle (16), Einstein ha le componenti eE_x, eE_y, eE_z della forza elettromotrice che agisce sull'elettrone, considerate nel sistema di riferimento che si muove con l'elettrone, con la sua stessa velocità (in quel momento). (885) Egli chiama questa forza, "*la forza agente sull'elettrone*" ed utilizza la legge newtoniana che fornisce la forza:

grandezza della massa moltiplicata per grandezza dell'accelerazione = grandezza della forza

Si deve subito osservare che non è più possibile utilizzare questa relazione (almeno all'interno della meccanica relativistica.) .Essa si fonda infatti sul concetto classico di quantità di moto (mv) e di sua variazione nell'unità di tempo Δ(mv)/Δt. Ora, supponendo di non sapere ancora che la massa m non è più costante, la relazione che ci dà la variazione della quantità di moto nell'unità di tempo diventa:

$$\frac{\Delta(m\overrightarrow{v})}{\Delta t} = \frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a} = \vec{F}$$

Ebbene, dato che conosciamo già la composizione relativistica delle velocità, non è più possibile fare i passaggi che abbiamo fatto, infatti quel Δv che compare nel primo passaggio dovrà essere modificato secondo la composizione relativistica, delle velocità. Inoltre, supponendo di sapere già che la massa non è più costante, nessuno ci autorizza più a fare il primo passaggio; non è cioè possibile tirar fuori da un simbolo di variazione (Δ) una quantità variabile (m). In ultima analisi si può soltanto accettare la prima relazione uguagliata con l'ultima, e cioè:

$$\vec{F} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} \qquad \text{o meglio} \qquad \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

il che vuol dire che come definizione di forza dobbiamo assumere:

grandezza della forza = variazione della quantità di moto nell'unità di tempo

[o meglio: grandezza della forza = derivata rispetto al tempo della quantità di motoJ.

E questo per ciò che riguarda la definizione della forza data da Einstein. C'è poi un altro aspetto del problema. Einstein, come abbiamo visto, credette di poter indicare la forza elettromotrice che agisce sull'elettrone con le sue componenti eE_x, eE_y, eE_z, anche nel sistema S. Tuttavia, come dice Pauli, (886) in meccanica relativistica si mostra che la definizione di forza elettromotrice, più opportuna e più naturale, per una carica che si muova in un campo elettromagnetico, di moto qualsiasi, è la forza, di Lorentz. "*Si mostra cioè che solo con questa definizione è possibile esprimere la forza come derivata temporale di una quantità di moto, che nei sistemi isolati si conserva.*" (886)

Queste difficoltà, presenti nella prima formulazione di Einstein della relatività, furono messe in evidenza ed in gran parte risolte da Plance (887) in una sua memoria del 1906. (888) Lo stesso Einstein le riconobbe subito fondate, tant'è vero che nelle ristampe successive del suo articolo del 1905 aggiunse delle note in questo senso. Una di queste dice:
"La definizione della forza qui data non è vantaggiosa, come per primo fu dimostrato da M. Planck. E' assai più utile definire la forza in modo che il teorema dell'impulso e il teorema dell'energia assumano la forma, più semplice." (889)

Ritornando alle (l6), vediamo come prosegue Einstein.

Egli, data la sua definizione di forza 'meccanica' e di forza elettromotrice, poiché ha forze ai primi ed ai secondi membri, può riconoscere in $\mathbf{m_o\beta^3}$, $\mathbf{m_o\beta^2}$, $\mathbf{m_o\beta^2}$ delle masse ed in particolare le masse longitudinale e trasversale:

$$\text{massa longitudinale} = \mathbf{m_o\beta^3} = \frac{m_o}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3}$$

$$\text{massa trasversale} = \mathbf{m_o\beta^2} = \frac{m_o}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}$$

e questo nelle ipotesi che l'accelerazione che compare nelle (16) sia misurata nel sistema S supposto in quiete. Come si può subito vedere le relazioni trovate da Einstein per le masse longitudinale e trasversale non sono in accordo con quelle trovate da Lorentz [si vedano le (8) ed (8 bis) del paragrafo 5 del capitolo 4]. In particolare per la massa trasversale Lorentz aveva trovato un valore $m_o\beta$. Ma, assumendo le correzioni di Planck, partendo cioè dalle (15) e non dalle (16) si arriva ad un completo accordo (si veda allo scopo lo scritto di Planck citato in nota 668). In definitiva:

$$
(17) \quad \begin{cases} \text{massa longitudinale} = \dfrac{m_o}{\left(\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\right)^3} \\[2em] \text{massa trasversale} = \dfrac{m_o}{\left(\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\right)^2} \end{cases}
$$

Lo stesso Einstein, in un'altra nota successiva al suo articolo, si rende conto dell'arbitrarietà della definizione della forza che, **a priori**, dipende dalle (15). Egli aggiunse infatti queste parole: "*Naturalmente per altre definizioni della forza e dell'accelerazione si otterrebbero altri valori per le masse; si vede da ciò che, nel comparare diverse teorie del moto dell'elettrone, si debba procedere con prudenza.*" (890)

A questo punto del suo articolo Einstein, dopo aver osservato che questi ultimi risultati valgono anche per punti materiali ponderabili che *diventano* elettroni quando a loro si aggiunga una carica elettrica, (890 bis) passa a. discutere dell'energia che compete all'elettrone che si muove, secondo le modalità viste prima, in un campo elettromagnetico.

Supponiamo che un elettrone si muova lungo l'asse x del sistema S (supposto in quiete) sotto l'azione del campo elettrico E e quindi della forza eE_x. L'energia necessaria a che il moto dell'elettrone si realizzi è evidentemente fornita dal campo. Poiché l'energia che richiede l'elettrone per spostarsi è data dalla forza cui è soggetto moltiplicata per lo spostamento, per un dato spostamento Δx l'energia ΔW necessaria all'elettrone e' data da:

$$\mathbf{\Delta W = F.\ \Delta x}$$

e cioè:

$$\mathbf{\Delta W = eE_x\ \Delta x.} \qquad (18)$$

Per uno spostamento complessivo composto da tanti piccoli spostamenti Δx, l'energia W necessaria sarà:

$$\mathbf{W = \sum_{x} eE_x\ \Delta x} \qquad (19)$$

dove il simbolo Σ sta per *somma* e, cioè, l'energia totale sarà data dalla somma di tutte le energie necessarie per ogni spostamento Δx. Nel caso si abbia a che fare con spostamenti infinitesimi dx l'energia necessaria all'elettrone sarà anch'essa infinitesima e varrà dW, di modo che la (l8) assumerà la forma:

$$\mathbf{dW = eE_x\ dx}$$

e, per uno spostamento composto da tanti spostamenti infinitesimi dx, l'energia totale W necessaria sarà, analogamente alla (l9), data da:

$$\mathbf{W = \int eE\ .dx} \qquad (20)$$

dove il simbolo $\int$, che si legge integrale, sta per *somma* di tutte le energie infinitesime necessarie ad ogni spostamento infinitesimo dx. Ora, l'energia rappresentata dalla (20) è energia che il campo deve fornire all'elettrone, il quale, si ricordi, essendo lentamente accelerato, non può perdere energia sotto forma di radiazione elettromagnetica. Inoltre l'energia che il campo fornisce all'elettrone diventa energia cinetica dell'elettrone e quindi le due energie dovranno poter essere uguagliate.

Anche l'energia cinetica sarà data dal prodotto della forza, (questa volta meccanica) cui è soggetto l'elettrone, moltiplicata per un dato spostamento Δx. Tenendo presente la prima delle (15) che per la forza meccanica dà il prodotto della massa longitudinale $\mathbf{m_o\beta^3}$, per l'accelerazione a_x, per l'energia cinetica ΔW che compete all'elettrone si avrà:

$$\mathbf{\Delta W = m_o\beta^3 .\ a_x\ \Delta x}$$

Anche qui, per uno spostamento complessivo composto da tanti spostamenti Δx, si avrà:

$$\mathbf{W = \Sigma\ m_o\beta^3 .\ a_x\ \Delta x}$$

e, nel caso gli spostamenti siano infinitesimi (dx) si avrà:

$$\mathbf{W = \int\ m_o\beta^3 .\ a_x\ \Delta x}$$

Poiché l'accelerazione a_x si può anche scrivere come la variazione infinitesima dalla velocità rispetto al tempo (dv/dt, derivata temporale della velocità), si ha:

$$\mathbf{W = \int\ m_o\beta^3 (dv/dt)dx\ =\ \int\ m_o\beta^3\ (dx/dt)dv}$$

ricordando che dx/dt = v è una velocità, tenendo conto che l'integrale deve essere esteso a tutti gli elementi $\mathbf{m_o\beta^3 v}$ compresi dal momento in cui l'elettrone è fermo (v = 0) al momento in cui l'elettrone ha acquistato la velocità v, si ha:

$$\mathbf{W = \int_o^v\ m_o\beta^3 v dv} \qquad (21)$$

Per quanto già detto, la (20) e la (21) debbono essere uguali e cioè:

$$\mathbf{W = \int\ eE_x dx = \int_o^v\ m_o\beta^3 v dv} = \int_o^v \frac{m_o v}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3} dv$$

Calcolando l'integrale si trova: (891)

$$\mathbf{W} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ \mathbf{- m_o c^2} \qquad (22)$$

Dalla relazione scritta si vede che per v = c l'energia diventa:

$$\mathbf{W = m_o c^2/0\ -\ m_o c^2\ =\ \infty}$$

cioè infinitamente grande e ciò vuol dire che per far marciare un elettrone alla velocità della luce occorre fornirgli una energia infinita. E naturalmente, anche qui come nei risultati precedenti, non ha senso pensare a velocità superiori a c. Inoltre, dice Einstein, la relazione (22) deve valere anche per masse ponderabili. E, dopo aver ricavato alcuni risultati "*espressione delle leggi secondo le quali conformemente alla presente teoria deve muoversi l'elettrone*", Einstein conclude questo lavoro ringraziando il suo amico Michele Besso per il sostegno che gli fornì nell'elaborazione dell'articolo.

NOTE

(872) Si tratta di 6 equazioni differenziali che legano tra di loro le componenti vettoriali dell'intensità (forza) del campo elettrico (E_x , E_y , E_z) e le componenti vettoriali dell'intensità (forza.) del campo magnetico (H_x , H_y , H_z), al variare del tempo t e dello spazio (x, y, z). Esse si possono raggruppare in due terne: "***la prima terna** esprime la correlazione che necessariamente deve esistere **nel vuoto** ... fra qualsiasi variazione nel tempo t di ciascuna delle tre componenti E_x , E_y , E_z della forza elettrica del campo [E] e le variazioni nello spazio delle due componenti della forza magnetica perpendicolari ad essa. Reciprocamente **la seconda terna** esprime l'analoga correlazione fra qualsiasi variazione nel tempo di ciascuna delle tre componenti della forze, magnetica del campo [H] e le variazioni nello spazio delle due componenti della forza elettrica ad essa perpendicolari*" (bibl.81, pag.334). Si deve però notare che l'insieme delle 6 equazioni va visto come un sistema unico.

(873) Anche qui Einstein non dà semplicemente il risultato espresso dalle (14). Egli si scrive prima le (14) dipendenti da un certo fattore g(v), funzione della velocità v del sistema S' rispetto ad S. Poi fa "*l'inversione di questo sistema di equazioni, una volta per risoluzione delle equazioni appena ottenute e una seconda per applicazione delle equazioni alla trasformazione inversa (da S' a S), che è caratterizzata dalla velocità – v*". In questo secondo caso ottiene un sistema del tipo di quello precedentemente ottenuto solo che ora è dipendente da un fattore g(-v). Poiché i due sistemi di equazioni così ottenuti debbono essere identici, deve risultare g(v).g(-v)= 1 e poi, per ragioni di simmetria, si deve avere g(v) = g(-v). Da ciò egli ricava facilmente che g(v) = 1. Anche qui quindi le equazioni di trasformazione (14) godono della proprietà di gruppo (che Einstein richiede a priori). Questo fatto ci permette di ricavare le equazioni inverse (risolte per le grandezze senza apice in funzione di quelle con apice) alle (14) con la semplice sostituzione di –v al posto di v.

(874) Per quel che riguarda la carica, a questo punto, la si deve indicare con q' essendo una carica nel sistema S'. Solo nel paragrafo 9 Einstein mostrerà che nel passaggio da un sistema all'altro la carica elettrica è invariante.

(875) La vecchia formulazione è per Einstein quella di. Lorentz. Egli, anche se non nomina il fisico olandese, fa esplicito riferimento in questo brano alla forza di Lorentz.

(876) Tanto più che sia la vecchia che la nuova teoria danno le stesse predizioni sperimentali e, nel caso particolare, ammettono il crearsi di una differenza di potenziale ai capi di un conduttore sia quando quest'ultimo è mosso in un campo magnetico, sia quando è il campo magnetico che si muove rispetto al conduttore. Si veda comunque la *asimmetria* della quale abbiamo discusso all'inizio di questo paragrafo.

(877) Le equazioni (14) mostrano che prendere in considerazione un campo elettrico comporta, al medesimo tempo, la presa in considerazione di un campo magnetico

(878) E' chiaro che si può fare anche il discorso per il passaggio inverso. E' ora, invece, interessante far vedere quanto sostenuto nel testo, anche se in modo qualitativo. Consideriamo ad esempio l'equazione (14) per la componente z del campo elettrico nel caso in cui $E_z = 0$; reintroducendo la notazione

$\beta = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, si ha:

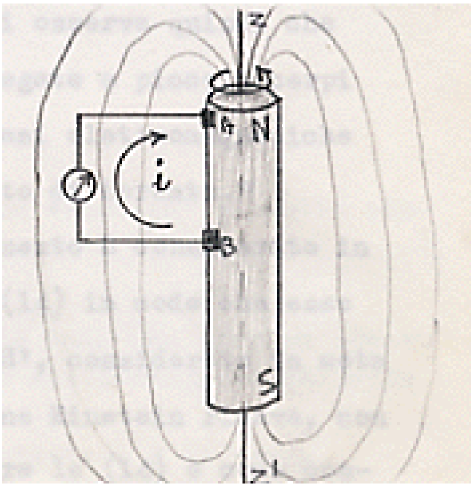
$$E'_z = \beta\left(E_z + \frac{v}{c}H_y\right) \Rightarrow E'_z = \beta\frac{v}{c}H_y$$

[l'ultima relazione essendo stata ottenuta, appunto, ponendo $E_z = 0$]. Moltiplicando a destra e a sinistra per la carica q (abbiamo già accennato al fatto che la carica è invariante; la cosa sarà comunque vista nelle pagine seguenti) si ha:

$$qE'_z = (\beta/c)(qvH_y)$$

e, come si vede, nel passaggio da un sistema ad un altro, una forza elettrica (primo membro) diventa forza magnetica (di Lorentz, secondo membro).
Si noti che lo stesso Einstein, nell'intervista scritta di Shankland (già citata), ebbe modo di dire "*Ciò che più o meno direttamente mi ha portato alla. teoria della relatività speciale era la convinzione che la forza elettromotrice che agisce su un corpo in moto in un campo magnetico non era altro che un campo elettrico*" (bibl. 120, pag.35).

(879) Quest'ultima frase di Einstein va brevemente spiegata. Una *macchina unipolare* è un meccanismo schematicamente descritto in figura. Un magnete ruota intorno al suo asse zz' mentre un circuito esterno striscia in A e B (B è il centro del magnete mentre A è nelle vicinanze di un polo; per questo il



meccanismo è detto unipolare); nel circuito esterno circola una corrente i. E' evidente, da quanto detto, che nel circuito circola corrente anche quando il magnete è immobile mentre il circuito gli gira intorno (per maggiori dettagli si veda bibl. 181, Vol. 6, pag.225). Il problema, che per primo Faraday si era posto (bibl. 71, 28ª serie, 1651), consisteva in questo: quando il magnete è in rotazione, ruotano anche le linee di forza ad esso connesse ? Einstein afferma che questo problema *è privo di significato* poiché non ha senso parlare di linee di forza indipendentemente dal loro stato di moto (per maggiori dettagli si veda D'Agostino, bibl. 130, pag. 61).

(880) L'elettrone deve essere lentamente accelerato in modo che possano essere trascurate le perdite per irraggiamento di onde elettromagnetiche nello spazio.

(881) Occorre notare che Einstein non introduce la notazione f di forza.

(882) I moti relativi da noi presi in considerazione avverranno sempre per moto dell'asse x parallelo all'asse x' (e, naturalmente, viceversa).

(883) Per lo sviluppo di questo calcolo occorre una buona conoscenza del calcolo differenziale. Per questo, con qualche dettaglio, lo sviluppo qui, in nota.

In un dato sistema S' le equazioni del moto di un elettrone lentamente accelerato sono:

$$(1)\quad \begin{cases} m_o a'_x = eE'_x \\ m_o a'_y = eE'_y \\ m_o a'_z = eE'_z \end{cases}$$

Dobbiamo trasformare queste equazioni, dal sistema S' al sistema S, utilizzando i seguenti due gruppi di trasformazione:

$$(2)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \qquad \text{oppure:} \qquad t = \dfrac{t' + \dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$(3)\quad \begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \dfrac{E_y - \dfrac{v}{c}H_z}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ E'_z = \dfrac{E_z + \dfrac{v}{c}H_y}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Innanzitutto osserviamo che le (1) si possono anche scrivere:

$$(4)\quad \begin{cases} m_o \dfrac{d^2x'}{dt'^2} = eE'_x \\[2ex] m_o \dfrac{d^2y'}{dt'^2} = eE'_y \\[2ex] m_o \dfrac{d^2z'}{dt'^2} = eE'_z \end{cases}$$

Iniziamo allora con il calcolarci $\dfrac{d^2x'}{dt'^2}$. Si ha successivamente:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\cdot\frac{dt}{dt'}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right] \cdot \frac{d}{dt'}\left[\frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

$$= \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1 + \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{\frac{dx}{dt} - v + \frac{dx'}{dt'}\left(\frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \to$$

$$\to \quad \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{dx'}{dt'} - \left(\frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt} - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v \quad \to$$

$$\to \quad \frac{dx'}{dt'}\left(1 - \cancel{\frac{v^2}{c^2}} - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt} + \cancel{\frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{dx}{dt} - v \quad \to$$

$$(5) \to \quad \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}}$$

Calcolata la derivata prima passiamo a calcolarci la derivata seconda:

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d}{dt'}\left[\frac{dx'}{dt'}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx'}{dt'}\right]\cdot\frac{dt}{dt'}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}}\right]\cdot\frac{d}{dt'}\left[\frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

$$= \left[\frac{\frac{d^2x}{dt^2}\left(1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}\right) + \frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{dx}{dt} - v\right)\frac{v}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}\right)^2}\right]\cdot\left[\frac{1 + \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

[e, ricordando la (5), segue]

$$= \frac{\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{v^2}{c^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}\right)^2}\cdot\frac{1 + \frac{v}{c^2}\left[\frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}}\right]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{\frac{d^2x}{dt^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}\right)^2}\cdot\frac{\frac{1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$(6) \qquad = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}\, 1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}\right)^2}\cdot\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}\right)}$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

osservando che, nell'istante in cui l'elettrone e' in quiete rispetto ad S', istante per semplicita' scelto per confrontare i due sistemi di riferimento, l'elettrone ha una velocita' dx/dt lungo l'asse x data da $dx/dt = v$ (l'elettrone in quel dato istante ha la velocita' v con cui il sistema S' si muove rispetto ad S):

(88

$$= \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^3}$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2} \cdot (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-3/2}$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}})^3}$$

Ed in definitiva:

$$\text{(7)} \qquad \frac{d^2x'}{dt'^2} = \beta^3 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \cdot$$

Calcoliamoci ora $\frac{d^2y'}{dt'^2}$. Si ha successivamente:

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'}$$

$$= \frac{d}{dt}[y] \cdot \frac{d}{dt'} \left[\frac{t' + \frac{v}{c^2} \cdot x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]$$

$$= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{[e, ricordando la (5)]}$$

$$= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1 + \frac{v}{c^2} \left[\frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx}{dt}} \right]}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= \frac{dy}{dt}\cdot\frac{\dfrac{1 - \cancel{\frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}} + \cancel{\frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}} - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt})\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \to$$

$$\to \qquad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}} \;.$$

Passiamo ora a calcolarci la derivata seconda:

$$\frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d}{dt'}\left[\frac{dy'}{dt'} \right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{dy'}{dt'} \right]\cdot\frac{dt}{dt'}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\frac{dy}{dt}\cdot(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}} \right]\cdot\frac{d}{dt'}\left[\frac{t' + \frac{v}{c^2}\cdot x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]$$

[e, ricordando che la seconda tra queste due derivate l'abbiamo gia' calcolata - si veda il secondo fattore della (6) - si ha]

$$= \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}(1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}) - (1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}\cdot\frac{dy}{dt}(- \frac{v}{c^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2})}{(1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt})^2}\cdot\frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt})^3}\cdot\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{v}{c^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt} \right)$$

$$= \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(1 - \frac{v}{c^2}.\frac{dx}{dt})^3} \left[\frac{d^2y}{dt^2}(1 - \frac{v}{c^2}.\frac{dx}{dt}) + \frac{v}{c^2}.\frac{d^2x}{dt^2}.\frac{dy}{dt} \right]$$

[osservando che, nell'istante in cui l'elettrone e' in quiete rispetto ad S', esso ha una velocita' dx/dt lungo l'asse x data da $v = dx/dt$ e ricordando che, nelle nostre ipotesi, la velocita' dy/dt dell'elettrone lungo l'asse y e' nulla ($dy/dt = 0$), si ha]

$$= \frac{d^2y}{dt^2}.\frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})(1 - \frac{v^2}{c^2})}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^3}$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2}.\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Ed in definitiva:

$$\frac{d^2y'}{dt'^2} = \beta^2.\frac{d^2y}{dt^2}. \tag{8}$$

Un calcolo esattamente identico a quest'ultimo si puo' fare per $\frac{d^2z'}{dt'^2}$ e si trova:

$$\frac{d^2z'}{dt'^2} = \beta^2.\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{9}$$

Sostituendo questi risultati, e cioe' le (7),(8),(9) e le (3), nelle (4) si ha:

$$\begin{cases} m_o\,\beta^3.\frac{d^2x}{dt^2} = eE_x \\ m_o\,\beta^2.\frac{d^2y}{dt^2} = e\beta(E_y - \frac{v}{c}H_z) \\ m_o\,\beta^2.\frac{d^2z}{dt^2} = e\beta(E_z + \frac{v}{c}H_y) \end{cases}$$

ed, in definitiva, si ottiene il risultato che cercavamo [le (15 bis) del paragrafo 2 del capitolo V°]:

$$\begin{cases} m_o a_x = \dfrac{e}{\beta^3} E_x \\ m_o a_y = \dfrac{e}{\beta} \left(E_y - \dfrac{v}{c} H_z\right) \\ m_o a_z = \dfrac{e}{\beta} \left(E_z + \dfrac{v}{c} H_y\right) \end{cases}$$

4) Come dice Straneo in bibl. 174, pag.97. Tra l'altro Straneo osserva, riportando una considerazione di M. von Laue, che Einstein mostra qui di non conoscere la dinamica relativistica sviluppata da Lorentz nel 1904. Per la verità sulla *svista* di Einstein ho trovato una scarsa bibliografia. Mi è sembrato quasi che si tenda a non tener conto delle sviste di Einstein. Sarebbe utile in proposito leggersi il saggio di M. A. Tonnelat, **Einstein, mito e realtà**, bibl. 182.

(885) Einstein dà anche un criterio operativo per la misura della forza elettromotrice agente sull'elettrone. Egli dice: "*questa forza potrebbe, per esempio, venir misurata con una bilancia a molla fissa nell'ultimo sistema.*"

(886) Bibl. 179, pag.l26. Ciò che dice Pauli è che bastava mantenere i secondi membri delle (15). Se si tiene infatti conto di quanto fin qui detto, le equazioni del moto di una particella carica in un campo elettromagnetico sono date dall'equazione:

(1) $$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \wedge \vec{H}$$

dove al primo membro si ha la forza con cui il campo elettrico agisce sulla carica, mentre al secondo membro si ha la forza di Lorentz. Per vedere come le (15) sono l'espressione qui data, si segua il seguente calcolo.

Ricordiamo innanzitutto l'espressione che ci fornisce il prodotto vettoriale $(\wedge)$ tra due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Si ha:

(2) $$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

dove $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k},$ sono dei vettori unitari (o versori); le quantità tra parentesi sonole componenti del vettore risultante, rispettivamente, lungo gli assi x, y, z; le A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z sono le componenti dei vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ lungo gli assi indicati dai bubindici.

Sviluppando il secondo membro della (1) secondo le (2), si ha (ricordando che, nel secondo passaggio, abbiamo posto $v_y = v_z = 0$ e che, più oltre, la velocità lungo l'asse x è semplicemente indicata con v):

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{i} \cdot \left[eE_x + \frac{e}{c}(v_y H_z - v_z H_y)\right] + \vec{j} \cdot \left[eE_y + \frac{e}{c}(v_z H_x - v_x H_z)\right] + \vec{k} \cdot \left[eE_z + \frac{e}{c}(v_x H_y - v_y H_x)\right] =$$

$$= \vec{i}eE_x + \vec{j} \cdot \left(eE_y - \frac{e}{c} v_x H_z\right) + \vec{k}\left(eE_z + \frac{e}{c} v_x H_y\right) = \vec{i}eE_x + \vec{j}e\left(E_y - \frac{v}{c} H_z\right) + \vec{k}e\left(E_z + \frac{v}{c} H_y\right).$$

Confrontando con la (15) si può subito vedere che la somma di queste tre ultime quantità non è altro che la somma dei secondi membri delle (15) e ciò mostra quanto ci eravamo proposti.

(887) Ho detto *in gran parte* poiché anche Planck, in un primo tempo, non riuscì a scrollarsi di dosso completamente la formulazione newtoniana della meccanica Le maggiori difficoltà nascevano soprattutto dal simbolismo. Fu Minkowski che nel 1908 avviò tutti i problemi a soluzione.

(888) M. Plance: **II principio di relatività e le equazioni fondamentali della meccanica**, Verh. Dtsh. Phys. Ges., 4, 1906, pagg. l36-141. Per seguire nelle sue linee essenziali questo lavoro si può vedere bibl .112, Vol.2, pagg.44-48.

(889) Citato da Straneo (bibl .174, pag. 97). Si noti che per teorema dell'impulso si intende ciò che abbiamo detto sulla quantità di moto, mentre per quel che riguarda il teorema dell'energia ci si riferisce alla conservazione dell'energia, tema che Einstein affronterà subito dopo quello che stiamo discutendo.

(890) Si veda la nota 6 a pag. 63 di bibl. 131.

(890 bis) Si noti con quali semplici parole Einstein passa a generalizzare quanto trovato per gli elettroni alle particelle materiali di qualunque tipo. Si osservi inoltre che Einstein assume per l'elettrone a riposo la forma sferica senza porsi i problemi che si erano posti Lorentz ed. Abraham a proposito del suo essere soggetto a disintegrarsi a seguito della repulsione elettrostatica delle cariche negative elementari che lo avrebbero dovuto costituire.

(891) L'integrale proposto si risolve nel modo seguente:

$$\int_o^v \frac{m_o v}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3} dv = m_o \int_o^v v\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} dv = m_o\left(-\frac{c^2}{2}\right)\int_0^v \left(-2\frac{v}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} dv =$$

$$= -\frac{1}{2} m_o c^2 \left[\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_o^v = m_o c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]_0^v = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2 .$$

Come si può vedere, questo è il risultato che abbiamo dato nella (22) del paragrafo 2 del capitolo V.