LE EQUAZIONI DI TRASFORMAZIONE PER LA QUANTITÀ DI MOTO E L'ENERGIA

Le espressioni (17 bis) e (25 bis) che abbiamo trovato rispettivamente per quantità di moto ed energia relativistiche sono date in un determinato riferimento, ad esempio, S:

$$(17bis)\cdots\cdots\left\{\begin{array}{l} p_x = \dfrac{m_o v_x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ p_y = \dfrac{m_o v_y}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ p_z = \dfrac{m_o v_z}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{array}\right\}$$

$$(25bis)\cdots\cdots E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

dove $\mathbf{v_x}$,$\mathbf{v_y}$,$\mathbf{v_z}$ sono le componenti della velocità **v** di un dato oggetto nel riferimento dato S, risultando

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 .$$

Supponiamo ora di voler riscrivere le (17 bis) e (25 bis) per un altro riferimento S' in moto con velocità **u** rispetto ad S, con le solite modalità (S' fa scivolare il suo asse x' Sull'asse x di S, nel suo verso positivo). In questo riferimento il nostro oggetto si muoverà con una velocità **v'**, di componenti v'_x, v'_y, v'_z tali che $v'^2 = v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z$ che può essere trovata mediante la composizione delle velocità [si vedano le (14)] e, data la costanza di **c** e l'invarianza di $\mathbf{m_0}$ (in quanto si tratta di una massa a riposo), le (17 bis) e (25 bis) diventano rispettivamente:

$$(37) \cdots\cdots \begin{cases} p'_x = \dfrac{m_o v'_x}{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}} \\ p'_y = \dfrac{m_o v'_y}{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}} \\ p'_z = \dfrac{m_o v'_z}{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$$(38) \cdots\cdots E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}$$

Cominciamo con il calcolarci 1'equazione di trasformazione per la quantità **$(1 - v'^2/c^2)^{1/2}$** che, come si vede, compare al denominatore di tutte le equazioni. Per far ciò dobbiamo tener conto che:

$$v'^2 = v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z$$

e che [vedi le (14) ed osserva che ora i ruoli di u e di v sono cambiati]:

$$(14\ \text{bis}) \qquad \begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - u}{1-\dfrac{v_x u}{c^2}}; \\ v'_y = \dfrac{v_y \cdot \sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1-\dfrac{v_x u}{c^2}}; \\ v'_z = \dfrac{v_z \cdot \sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1-\dfrac{v_x u}{c^2}} \end{cases}$$

Si ha così che:

$$v'^2 = \frac{(v_x - u)^2 + v_y^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + v_z^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}$$

e quindi:

$$\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{(v_x - u)^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(v_y^2 + v_z^2)}{c^2\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{c^2\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2 - (v_x - u)^2 - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(v_y^2 + v_z^2)}}{c\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{c^2 - u^2 - v_x^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(v_y^2 + v_z^2)}}{\frac{c^2 - uv_x}{c}} = \frac{c\sqrt{c^2 - u^2 - \left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}}{c^2 - uv_x} =$$

$$= \frac{c\sqrt{c^2 - u^2 - v^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}{c^2 - uv_x} = \frac{c\sqrt{(c^2 - u^2) - \frac{v^2}{c^2}(c^2 - u^2)}}{c^2 - uv_x} = \frac{\sqrt{c^2(c^2 - u^2)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}{c^2 - uv_x} =$$

$$= \frac{\sqrt{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}}{c^2 - uv_x}.$$

Sostituendo questo risultato nelle (37) e (38) e tenendo conto delle (14 bis) si ha:

$$p'_x = \frac{m_0 \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}}{\frac{\sqrt{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}}{c^2 - uv_x}} = \frac{m_0 c^2 \frac{v_x - u}{c^2 - uv_x}}{\frac{\sqrt{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}}{c^2 - uv_x}} = \frac{m_0 c^2 (v_x - u)}{c^2\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \cdot \frac{v_x - u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{mv_x - mc^2 \frac{u}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{p_x - Eu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

$$p'_y = \frac{m_0 \dfrac{v_y\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1-\dfrac{uv_x}{c^2}}}{\dfrac{\sqrt{(c^2-u^2)(c^2-v^2)}}{c^2-uv_x}} = \frac{m_0 c^2 \dfrac{v_y\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{c^2-uv_x}}{\dfrac{\sqrt{(c^2-u^2)(c^2-v^2)}}{c^2-uv_x}} = \frac{m_0 c^2 v_y\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{c^2\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = p_y$$

$p'_z = p_z$ (nello stesso modo in cui si è trovato $p'_y = p_y$).

$$(39)\cdots\cdots\cdots E' = \frac{m_0 c^2}{\dfrac{\sqrt{(c^2-u^2)(c^2-v^2)}}{c^2-uv_x}} = \frac{m_0 c^2 (c^2-uv_x)}{c^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = m\frac{c^2-uv_x}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{E-p_x u}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}.$$

Ricapitolando, le equazioni di trasformazioni cercate sono:

$$\left\{\begin{aligned} p'_x &= \frac{p_x - \dfrac{Eu}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \frac{E-p_x u}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\}$$

(40)

$$
\begin{cases}
p_x = \dfrac{p'_x + \dfrac{E'u}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \\[2ex]
p_y = p'_y \\[2ex]
p_z = p'_z \\[2ex]
E = \dfrac{E' + p'_x u}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}
\end{cases}
$$

dove le ultime quattro trasformazioni sono state scritte tenendo conto del principio di relatività e sostituendo **– u** ad **u.**

LE EQUAZIONI DI TRASFORMAZIONE PER LA MASSA E PER LA FORZA

Le equazioni di trasformazione per la massa, sempre rispetto ai riferimenti S ed S' presi in considerazione nella sezione precedente, si possono ricavare facilmente a partire da uno dei passaggi che abbiamo incontrato per ricavare la (39):

$$
(39) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad E' = m\frac{c^2 - uv_x}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}
$$

ricordando che:

$$
E' = m'c^2
$$

si trova subito:

$$
m'c^2 = m\frac{c^2 - uv_x}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow
$$

$$(41)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots m' = \frac{m\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Per il principio di relatività e sostituendo **–u** ad **u**, si ricava:

$$(42)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots m = \frac{m'\left(1+\frac{uv'_x}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

E la (41) e (42) sono le equazioni di trasformazione per la massa da noi cercate.

Per quel che riguarda le equazioni di trasformazione della forza, basta ricordare la definizione (15):

$$(15)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

e, per il principio di relatività, poiché sia su S che su S' dovrà valere la stessa equazione per il moto, risulterà:

$$(15bis)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'}$$

Il problema può allora essere risolto utilizzando le (40). Tenendo conto delle componenti $\mathbf{F_x}$, $\mathbf{F_y}$ ed $\mathbf{F_z}$ della forza **F** e ricordando la trasformazione di Lorentz (8) per t', si ha:

$$(15ter)\cdots\cdots F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{\frac{dp'_x}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\frac{\frac{dp_x}{dt}-\frac{u}{c^2}\cdot\frac{dE}{dt}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}{\frac{1-\frac{u}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}} = \frac{\frac{dp_x}{dt}-\frac{u}{c^2}\cdot\frac{dE}{dt}}{1-\frac{u}{c^2}.\frac{dx}{dt}} = \frac{F_x-\frac{u}{c^2}\cdot\frac{dE}{dt}}{1-\frac{u}{c^2}\cdot v_x}$$

avendo posto $\mathbf{v_x} = $ **dx/dt.**

Resta da calcolare **dE/dt**. Lo faremo semplificando il problema con l'ipotesi che l'oggetto su cui agisce la forza sia istantaneamente in quiete su S' (**v' = 0**). Ricordando la (21 bis):

$$(21bis)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots E = E_c + m_0 c^2$$

che la variazione infinitesima dell'energia cinetica ($\mathbf{dE_c}$) è uguale al lavoro infinitesimo ($\mathbf{F_x.dx}$) e che $\mathbf{m_0c^2}$ è una costante, si ha:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_c}{dt} = \frac{F_x \cdot dx}{dt} = F_x \cdot v_x$$

Sostituendo questa espressione nella (15 ter), si trova:

$$F'_x = \frac{F_x - \frac{u}{c^2} \cdot F_x v_x}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x} = \frac{F_x \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \Rightarrow F'_x = F_x$$

In modo più semplice si può procedere per **F’**$_y$ ed **F’**$_z$. Sempre ricordando le (40) e la seconda delle (10), e cioè **dt/dt’ = 1/(1 – u²/c²)$^{1/2}$**, si ha:

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{dp_y}{dt'} = \frac{dp_y}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{F_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{dp_z}{dt'} = \frac{dp_z}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{F_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Ricapitolando, nel caso particolare in cui l’oggetto su cui agisce la forza sia in quiete su S’ ad un dato istante (istante nel quale **v’ = 0**), le equazioni di trasformazione per la forza sono:

$$(43)\cdots\cdots\cdots \left\{ \begin{array}{l} F'_x = F_x \\ F'_y = \dfrac{F_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ F'_z = \dfrac{F_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{array} \right\}$$

Nel caso più generale, in cui l’oggetto su S’ sia già dotato di una data velocità (v’ ≠ 0) quando su di esso agisce la forza, si può dimostrare che valgono le seguenti equazioni di trasformazione (si veda, ad esempio, A. P. French – **Special Relativity** – Norton & Co., New York, 1968):

$$\left\{\begin{array}{l}
F'_x = \dfrac{F_x - \left(\dfrac{u}{c^2}\right)\vec{v}\times\vec{F}}{1-\dfrac{uv_x}{c^2}} \\[3em]
F'_y = \dfrac{F_y\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1-\dfrac{uv_x}{c^2}} \\[3em]
F'_z = \dfrac{F_z\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1-\dfrac{uv_x}{c^2}}
\end{array}\right\}$$

(44)

$$\left\{\begin{array}{l}
F_x = \dfrac{F'_x + \left(\dfrac{u}{c^2}\right)\vec{v}'\times\vec{F}'}{1+\dfrac{uv'_x}{c^2}} \\[3em]
F_y = \dfrac{F'_y\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1+\dfrac{uv'_x}{c^2}} \\[3em]
F_z = \dfrac{F'_z\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1+\dfrac{uv'_x}{c^2}}
\end{array}\right\}$$